Tópicos de Matemática Elementar

Exercícios – 2002/03

1. Verifica que 120 é uma solução de $\sigma(n) = 3n$, fazendo o menor número possível de contas.

2. Encontra 5 números perfeitos.

3. O resultado de Euclides sobre números perfeitos mencionado na aula teórica é a Proposição 36 do livro IX dos *Elementos*. O seu enunciado original é: *Se tomarmos tantos números quantos quisermos, começando com a unidade e continuando em dupla proporção, até a soma deles ser um número primo, então essa soma multiplicada pelo último desses números dá um número perfeito.*

   Mostra que este enunciado é equivalente ao dado na aula.

   (*Nota*: "proporção" = progressão geométrica; "dupla proporção" = multiplicar por 2.)

4. (a) Verifica que não é sempre verdade que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

   (b) Exactamente quando é que a relação mencionada em (a) é válida?

5. Encontra soluções de $\sigma(n) = kn$ para valores de k maiores que 2.

6. Procura soluções de $\sigma(n) = 2n - 1$ e de $\sigma(n) = 2n + 1$.

7. Um número n tal que $\sigma(n) < 2n$ diz-se *deficiente* e um tal que $\sigma(n) > 2n$ diz-se *abundante*. Dá exemplos de ambos os tipos de números, e procura o primeiro abundante ímpar.

8. Mostra que um número n é perfeito *se e só se* for verdade que $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.

9. Seja $n = 22021 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$. Verifica que:

$$(22021 + 1) \cdot (1 + 3 + 3^2) \cdot (1 + 7 + 7^2) \cdot (1 + 11 + 11^2) \cdot (1 + 13 + 13^2) = 2n.$$

Porque é que isto não implica que n é um dos tão procurados números perfeitos ímpares?

(Este exemplo foi descoberto por René Descartes (1596–1650).)

10. Mostra que um número perfeito ímpar (se existir...) tem de ter pelo menos 3 factores primos. Procura outras condições que um perfeito ímpar deve satisfazer.

11. Dois números dizem-se *amigáveis* se a soma dos divisores (excluindo o próprio) de cada um deles for igual ao outro. No século IX o matemático árabe Thâbit ben Korrah descobriu que os números $2^k ht$ e $2^k s$ são amigáveis quando $h = 3 \cdot 2^k - 1$, $t = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$ e $s = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$ são primos superiores a 2. Prova que assim é, e usa este resultado para dar exemplos de pares de números amigáveis.

12. Mostra que o número de divisores (positivos) do número n, cuja decomposição em factores primos é $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, é dado por $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

13. Determina um inteiro positivo cuja decomposição em números primos é da forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7 \cdot 11^\gamma$ e tem exactamente 360 divisores. Qual a soma desses divisores?

14. Dá exemplo de dois factores próprios de $2^{91} - 1$.

15. Prova que se o número $\underbrace{11 \cdots 11}_{n\ 1's}$ é primo, então n é primo.

16. Mostra que o número $\underbrace{10101 \cdots 101}_{n\ 1's}$ só é primo quando $n = 2$.

17. (a) Mostra que, para todos os inteiros x, y, n, com $n \geq 0$, se tem: $x - y \mid x^n - y^n$.

    (b) Mostra que, para todos os inteiros x, y, n, com $n \geq 1$ e ímpar, se tem: $x + y \mid x^n + y^n$.

    (c) Encontra 4 factores próprios de $3^{105} + 4^{105}$.

18. Procura condições necessárias para que um número da forma $2^m + 1$ seja primo. Verifica se essas condições são suficientes.

19. Calcula inteiros x, y tais que $36x + 47y = 1$.

    Dá exemplo de dois outros inteiros nas mesmas condições.

20. Sejam a, b e n inteiros tais que $(a, b) = 1$, $a \mid n$ e $b \mid n$. Mostra que $ab \mid n$.

21. Se tiveres **apenas** 2 recipientes que levam, respectivamente, 26g e 10g de farinha, consegues medir exactamente 2g de farinha? E 7g? Justifica as tuas respostas.

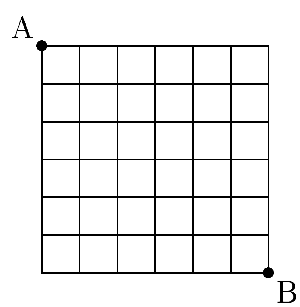
22. Qual o número de apostas (simples) que se podem fazer no:

    (a) totobola?

    (b) totoloto?

    Qual dos dois números anteriores é maior?

23. No seguinte mapa, onde as linhas representam ruas, quantos trajectos distintos há do ponto A até ao ponto B (sem andar para trás...)?



24. Qual o coeficiente de a^8b^5 no desenvolvimento de $(a + b)^{13}$? E no de $(a - b)^{13}$? E no de $(a - b)^{17}$?

25. Qual o coeficiente de $a^8b^5c^6$ no desenvolvimento de $(a+b+c)^{19}$? E no de $(a-b-c)^{19}$? E no de $(a + b - c)^{19}$?

26. Quantos colares distintos de 20 missangas é possível fazer com 7 missangas castanhas, 3 verdes e 10 brancas?

27. Determina a factorização em números primos dos números do teu bilhete de identidade e do teu telefone.

28. Seja p_n o n-ésimo número primo (por exemplo, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, etc...). Determina o primeiro número n tal que $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ não é primo.

29. Seja $F_m = 2^{2^m} + 1$. Mostra que $F_m - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{m-1}$. Conclui que $(F_m, F_n) = 1$, para todo $m \neq n$. Utiliza isto para obter mais uma demonstração da infinidade dos números primos.

30. Encontra o resto da divisão de 41^{73} por: (a) 3; (b) 5; (c) 7.

31. Verifica que $89 \mid 2^{11} - 1$ e que $47 \mid 2^{23} - 1$.

32. Escolhe os dois algarismos que faltam no número 30_0_03 de modo a que este seja divisível por 13. Quantas soluções tem este problema?

33. Utiliza congruências para determinar em que dia da semana nasceste.

34. Imagina que tens 5 folhas de papel e que cortas algumas delas em 5 bocados, e que alguns (possivelmente todos) desses bocados são depois cortados em 5 bocados mais pequenos, etc... Prova que por este processo nunca consegues obter 1995 bocados de papel.

35. Quais os dois últimos algarismos de: (a) $2^{127} - 1$? (b) F_6?

36. Mostra que o algoritmo dos "noves fora" dá o resto da divisão de um número por 9. (Por exemplo, $3817 : 3 + 8 = 11$ "noves fora" $2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 7 = 10$ "noves fora" 1, e 1 é o resto da divisão de 3817 por 9.)

37. Justifica as "provas dos nove" mencionadas no ensino básico.

38. Dá um critério de divisibilidade por 11 e "provas dos onze" para a multiplicação e para a divisão. Faz o mesmo para 3 e 5.

39. (a) Explica porque é que se $p > 3$ é um número primo, então $p \equiv \pm 1 \pmod 6$.

    (b) Mostra que há uma infinidade de primos da forma: (a) $4n+3$, (b) $6n+5$.

40. Mostra que se $ca \equiv cb \pmod m$, então $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$, onde $d = (c, m)$.

41. (a) Mostra que a equação $9x^2 - 8y^2 = 5$ não tem soluções em números inteiros.

    [Sugestão: Estuda a equação módulo 8...]

    (b) Mostra que a equação $7x^3 + 2 = y^3$ não tem soluções em números inteiros.

42. Encontra o menor número $d \geq 1$ tal que $a^d \equiv 1 \pmod p$ para $a = 2, 3, 6$ e: (a) $p = 17$, (b) $p = 31$.

43. Determina quais dos números $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$, $2^{23} - 1$ e $2^{29} - 1$ são primos.

44. (a) Verifica que F_6 $(= 2^{2^6} + 1)$ é divisível por $2^8 \cdot 1071 + 1$.

    (b) Procura um factor de F_7.

45. Verifica se:

    (a) $13 \mid 3^{1201} - 2^{1204}$,

    (b) $45 \mid 14^{289} + 31$.

    Caso a resposta seja negativa, indica o resto da respectiva divisão.

46. Sejam a e n tais que $(a, n) = 1$, e seja d o menor inteiro positivo tal que $a^d \equiv 1 \pmod n$. Mostra que se t é tal que $a^t \equiv 1 \pmod n$, então $d \mid t$.

47. Mostra que, para todo o inteiro positivo n, $4^{2n-1} + 3^{n+1}$ é divisível por 13. Como é que este exercício foi construído? Dá outros exemplos.

48. (a) Calcula o inverso de 17 módulo $\varphi(49)$.

    (b) Determina um inteiro x tal que $x^{17} \equiv 2 \pmod{49}$.

49. Mostra que se $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ e se $2^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$ para *todos* os factores primos de $n-1$, então n é primo. O número 2 tem aqui algum papel essencial?

50. Determina quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

    (a) O número $2^{102} \cdot 3348577 \cdot 3737657091169$ é um número perfeito.

    (b) $2^{10000} - 1$ é um número primo.

    (c) $5^{7^{13}} \equiv 1 \pmod{41}$.

    (d) Se $x \equiv y \pmod{m}$, então $x^2 \equiv y^2 \pmod{m^2}$ $(x, y \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N})$.

    (e) O inverso de 5 módulo 31 é 9.

51. Decifra a seguinte mensagem:

    "14955; 8161; 16389; 15086; 5057; 9596; 896; 14760; 14483; 2786; 5057; 9639; 2942; 11632; 4104; 6449; 7319; 8720; 4214; 3498; 11632; 16608; 6584; 2687; 359; 2524", sabendo que na sua codificação foi usado o código RSA com $n = 17287$ e $c = 9409$ (nas notações das aulas), e que a correspondência "alfabeto + pontuação $\leftrightarrow$ numerais" foi feita usando a seguinte tabela:

$\nearrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
3	U	V	W	X	Y	Z	,	.	!	

    (isto é, A $\leftrightarrow$ 10, N $\leftrightarrow$ 23, "," $\leftrightarrow$ 36, "espaço" $\leftrightarrow$ 39, etc...)

52. Decifra a seguinte mensagem:

“3072740; 2178355; 1660250; 1572476; 125926; 2687718; 535504; 3738367; 3908646; 1682763; 3671528; 3627954; 585930; 3977588; 2345979; 3031640; 1622658; 755589”, sabendo que na sua codificação foi usado o código RSA com $n = 4734419$ e $c = 1350823$ (nas notações das aulas), e que a correspondência “alfabeto + pontuação $\leftrightarrow$ numerais” foi feita usando a tabela do exercício anterior.

53. Determina o período das dízimas dos números racionais:

    (a) $\frac{1}{7}\,;\ \frac{2}{7}\,;\ \frac{3}{7}\,;\ \frac{4}{7}\,;\ \frac{5}{7}\,;\ \frac{6}{7}\,;\ \frac{8}{7}\,;\ \frac{9}{7}.$

    (b) $\frac{1}{16}\,;\ \frac{1}{80}.$

    (c) $\frac{1}{28}\,;\ \frac{1}{35}.$

    (d) $\frac{1}{31}\,;\ \frac{1}{49}.$

54. Escreve na forma de uma fracção cada uma dízimas finitas ou periódicas seguintes:

    (a) $0,123\,;\ 0,125.$

    (b) $0,(123)\,;\ 0,(125)\,;\ 0,(0023).$

    (c) $0,1(123)\,;\ 0,10(125)\,;\ 3,11(01).$

55. Mostra que $0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031 32\ldots$ (a dízima é formada concatenando, após a vírgula e por ordem, todos os números naturais) não é um número racional.

56. Mostra que o número $0,101001000100001000001$ {...6 zeros...} 1 {...7 zeros...} 1 ...*etc*... é irracional.

57. Para todo o número primo p, prova que o número $\sqrt{p}$ é irracional de um modo análogo ao utilizado na aula para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

58. Mostra que os números $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, e $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ são:

   (a) algébricos;

   (b) irracionais.

59. (a) Mostra que $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ é um número algébrico.

   (b) Mostra que se o número α é algébrico, então α^{-1} é também algébrico.

60. Mostra que se α é um número trancendente, então α^2 também o é.

61. Tenta mostrar que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ é um número irracional.

62. (a) Exibe uma bijecção entre o conjunto $\mathbb{Z}$ e o conjunto $\mathbb{Z}\cup\{\sqrt{2}\}$.

   (b) Faz o mesmo para os conjuntos $[0,1]$ e $[0,1]\cup\mathbb{N}$.

63. (a) Exibe uma bijecção entre os intervalos de números reais $[-1,1]$ e $[0,1]$, mostrando assim que têm a mesma cardinalidade.

   (b) Faz o mesmo para os intervalos $]0,1]$ e $[0,1]$.

64. Seja $2^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$, o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ no conjunto $\{0,1\}$. Prova que $2^{\mathbb{N}}$ não é um conjunto numerável.

65. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Mostra que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \not\simeq \mathbb{R}$.

66. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Mostra que $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$.

   [*Sugestão*: use o teorema de Schröder-Bernstein mencionado nas aulas.]

67. Diz quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas, justificando a tua resposta:

   (a) i é um número algébrico.

(b) As raízes do polinónio $x^5 - x + \sqrt{2}$ são números transcendentes.

(c) A soma de dois números tanscendentes é um número transcendente.

(d) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

68. Determina **todas** as raízes **racionais** do polinómio $(x-1)^9 + (x-1)^7 - 2$.

69. Resolve geometricamente a equação $x^2 + 6x = 16$ (ver o exemplo de al-Khwarizmi dado na aula).

70. Determina dois números tais que a soma seja 4 e o produto seja 1.

71. (Cardano) Dividir 10 em duas partes tais que o produto seja 40.

72. Numa certa festa houve 66 apertos de mão. Sabendo que toda a gente se cumprimentou mutuamente, determina o número de pessoas nessa festa.

73. Determina todas as soluções das seguintes equações do 3º grau:

    (a) $x^3 = 3x + 2$. (b) $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$. (c) $x^3 + x^2 = 2$.
    (d) $x^3 + x = 2$. (e) $x^3 = 16x + 4$. (f) $x^3 = 20x + 25$.
    (g) $x^3 = 30x + 36$.

74. Resolve (em $\mathbb{C}$) a equação: $x^3 + 3ix + 2i - 2 = 0$.

75. Determina os dois números (em $\mathbb{C}$) cuja soma e produto são ambos iguais a i.

76. Explica detalhadamente o que há de errado com a seguinte "prova" de que $-1 = 1$:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

77. (a) Verifica que $\sqrt{2} + i$ é uma raiz cúbica de $-\sqrt{2} + 5i$.

    (b) Determina as outras duas raízes cúbicas de $-\sqrt{2} + 5i$.

78. Calcula, na forma $a + bi$, as raízes quintas da unidade utilizando a seguinte observação: dividindo ambos os membros da equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ por x^2, obtém-se $x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} = 0$ e fazendo de seguida a mudança de variável $y = x + x^{-1}$, obtém-se $y^2 + y - 1 = 0$.

79. Seja $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ um número complexo. Ao número a dá-se o nome de *parte real* de z, número este que é usualmente denotado por $\Re(z)$. Ao número b o nome de *parte imaginária* de z, usando-se a notação $\Im(z)$. Mostra que:

    (a) $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

    (b) $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

80. Dados dois números complexos w e z, define-se o seu *produto escalar* por

$$< w, z > := \Re(w \cdot \bar{z}).$$

Mostra que $\Re(w \cdot \bar{z}) = \Re(z \cdot \bar{w})$ (de modo que não faz diferença em qual dos números se põe a "barra"), e explica a razão do nome "produto escalar".

81. (a) Mostra que:

    i. $< w, z >^2 + < iw, z >^2 = |w|^2 \cdot |z|^2, \forall w, z \in \mathbb{C}$.

    ii. $| < w, z > | \leq |w| \cdot |z|, \forall w, z \in \mathbb{C}$ (*desigualdade de Cauchy-Schwartz*).

    iii. $|w + z|^2 = |w|^2 + 2 < w, z > + |z|^2, \forall w, z \in \mathbb{C}$.

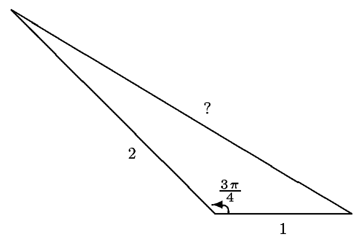
    iv. $|w + z| \leq |w| + |z|, \forall w, z \in \mathbb{C}$ (*desigualdade triangular*).

    (b) Mostra que em ii acima se tem uma igualdade quando e só quando w e z estiverem numa mesma recta contendo a origem (ou seja, $w = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R} : z = \lambda w$).

    [*Sugestão*: Observe-se que z e w estão numa mesma recta contendo a origem sse $w \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$.]

    (c) Mostra que em iv se tem uma igualdade se e só se $w\bar{z} \in \mathbb{R}_0^+$.

82. Interpreta o exercício 84(a)iii e iv em termos de triângulos e use 84(a)iii para calcular o comprimento do lado desconhecido do triângulo:



83. Representa no plano complexo os seguintes números:

(a) as raízes quartas da unidade. (b) as raízes quadradas de $1+i$.
(c) $(1-i)^8$. (d) as raízes oitavas de -1.
(e) as raízes quadradas de $-i$. (f) $(1+i)^{-2}$.
(g) as raízes quartas de i. (h) as raízes cúbicas de $i-1$.

84. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tais que $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Mostra que as condições seguintes são equivalentes:

(a) z_1, z_2, z_3 são vértices de um triângulo equilátero.

(b) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

(c) z_1, z_2, z_3 são as três raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

85. Mostra que $(1+\sqrt{3}\,i)^n + (1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^n$, para todo $n \equiv 1$ ou $5 \pmod 6$.

[*Sugestão*: Seja $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Começa por observar que $\alpha + \bar{\alpha} = 1, \alpha^6 = 1$, e $\alpha^{-1} + \bar{\alpha}^{-1} = 1$.]