História e Epistemologia da Matemática

Exercícios (sécs. VII-XIX...) – 2002/03

1. Leia a secção 7.3 do livro da Universidade Aberta (pp. 415–422) e responda às seguintes questões:

   (a) A que é que se referem as palavras "al-jabr" e "al-muqabala" no título da obra de al-Khwarizmi?

   (b) Resuma o conteúdo da Álgebra de al-Khwarizmi. Qual a sua importância histórica?

2. Efectue as seguintes multiplicações usando o método da *multiplicação em gelosia*:

   (a) 385×9015.

   (b) 678×987.

3. Calcular o quociente e o resto das seguintes divisões usando o método da *divisão em galera*:

   (a) $12300321 \div 989$.

   (b) $777777000000077770000000077777777 \div 888880000000088800000000008888888$.

4. O que é um ábaco? O que é que o *Liber Abaci* de Fibonacci tem a ver com ábacos?

5. Equacione, em notação moderna (o que deve incluir a escolha apropriada das incógnitas, e traduzir o problema por uma ou mais equações relacionando essas incógnitas), o seguinte problema do capítulo 12 do *Liber Abaci* [p. 336 da tradução de Siegler, ligeiramente reformulado]:

   Quatro homens com denários [moeda antiga de cujo nome deriva a palavra "dinheiro"] *encontraram uma bolsa com denários. O primeiro e o segundo com a bolsa ficam o dobro dos denários do terceiro e quarto homens. O segundo e o terceiro com a bolsa ficam com o triplo do quarto e primeiro; o terceiro e o quarto com a bolsa ficam com o quadrúplo do* *primeiro e segundo; e ainda o quarto e o primeiro com a bolsa ficam com o quintúplo dos denários do segundo e terceiro. Quantos denários tinha a bolsa e quanto tinha cada homem?*

6. Resolva o seguinte problema do capítulo 13 do *Liber Abaci* [p. 462 da tradução de Siegler]:

   Dois pássaros estavam no cimo de duas torres; uma torre tinha 40 passos de altura e a outra 30, e a distância entre as duas era de 50 passos; num certo instante o par de pássaros desceu voando até uma fonte que estava entre as duas torres, tendo ambos chegado no mesmo instante à fonte. Desde o momento que partiram até ao momento em que chegaram, voaram em linha recta do topo das torres até à fonte, tendo os dois percorrido exactamente a mesma distância. Pretende-se saber a que distância estava a fonte de cada uma das torres, e que distância voaram ambos os pássaros.

7. Explique o que é a *Hipótese do Ângulo Agudo*, no contexto da história da descoberta das geometrias não-euclidianas.

8. Comece por explicar que diferença há entre as duas perguntas seguintes, para depois dizer que resposta daria a cada uma delas.

   - Quem descobriu a geometria hiperbólica?
   - Quem descobriu as geometrias não-euclidianas?

9. Comente e critique a seguinte nota histórica retirada do livro de texto *Matemática 10*, Edições Contraponto, 1993, p. 173:

   Só mais de dois milénios depois de Euclides alguns matemáticos demonstraram que o 5º axioma era realmente um axioma, construindo novas geometrias em que tomavam como axiomas os quatro primeiros de Euclides e um outro contraditório com o 5º. Entre esses matemáticos, os que ficaram famosos foram Lobatchevski e Riemann.

Em 1832 Lobatchevski mostrou que se tomássemos como 5º axioma "por um ponto exterior a uma recta passa uma infinidade de rectas paralelas à dada", obteríamos uma geometria perfeitamente coerente — a Geometria Hiperbólica —, que Einstein mais tarde utilizou para interpretar o universo.

Em 1854, Riemann utilizou como 5º axioma "por um ponto exterior a uma recta não passa nenhuma recta paralela à dada" e criou assim a Geometria Esférica, que, como já vimos, tem como modelo a Terra.

Explique, em particular, com que ideias erradas sobre o desenvolvimento da Matemática pode um aluno ficar ao ler esta "nota histórica".

10. Comente e critique a seguinte nota histórica retirada do livro de texto *Matemática 10*, Porto Editora, 1995, p. 134:

    O matemático russo Lobatchevsky (1793–1856) pôs em dúvida a teoria de Euclides, em face do conceito de espaço infinito. Construiu uma geometria baseando-se nos mesmos axiomas que Euclides excepto um: por um ponto exterior a uma recta passa apenas uma recta paralela a ela. Em sustituição daquele axioma formulou o seguinte: "por um ponto exterior a uma recta passa uma infinidade de rectas paralelas à primeira".

    Também Riemann (1826–1866), matemático, criou uma geometria não euclidiana baseando-a no postulado "por um ponto exterior a uma recta não existe nenhuma paralela à primeira".

    Explique, em particular, com que ideias erradas sobre o desenvolvimento da Matemática pode um aluno ficar ao ler esta "nota histórica".

11. Comente e critique a seguinte introdução aos números complexos retirada do livro de texto *Matemática 12º*, Porto Editora, 1995, p. 100 (a transcrição é textual, a menos de uma única alteração para corrigir um pequeno erro que admito ser tipográfico!):

    Num trabalho do matemático italiano Cardano(1501-1576), propunha-se o seguinte problema: "Determinar duas partes do número 10 de modo que o seu produto seja 40".

Designando as partes por $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*, o problema resolve-se pelo sistema:*

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40. \end{cases}$$

As soluções encontradas por Cardano foram

$$x = 5 - \sqrt{-15} \ \textit{e} \ x = 5 + \sqrt{-15}, \ \textit{que,}$$

obviamente, não eram números reais.

Mas Cardano verificou que estas eram, de facto, soluções do problema posto, pois:

$$5 - \sqrt{-15} + 5 + \sqrt{-15} = 10$$

$$(5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15}) = 40.$$

Admitia-se que estes números não eram reais, embora resolvessem o problema.

Surgiu assim a ideia de criar um símbolo para representar $\sqrt{-1}$ *e tudo ficaria simplificado!*

Por exemplo,

$$5 - \sqrt{-15} = 5 - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{15} = 5 - \sqrt{15} \cdot \sqrt{-1}$$

$$5 + \sqrt{-15} = 5 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{15} = 5 + \sqrt{15} \cdot \sqrt{-1}.$$

Escolheu-se a letra i*, inicial de imaginário – em oposição a real.*

$$5 - \sqrt{-15} = 5 - \sqrt{15}\, i$$

$$5 + \sqrt{-15} = 5 + \sqrt{15}\, i$$

Bombelli chamou a estes números "quantidades silvestres", mas parece ter sido Gauss a utilizar a designação "números complexos", actualmente usada.

Explique, em particular, com que ideias erradas sobre o desenvolvimento da Matemática pode um aluno ficar ao ler esta introdução.

12. Leia a parte relevante da secção 9.3 do livro da Universidade Aberta (pp. 517–552) para responder à seguinte questão: quais as principais contribuições de Gauss, Abel e Galois para o problema da resolubilidade das equações algébricas?