História e Epistemologia da Matemática

Exercícios (Grécia I) – 2002/03

1. Mostre, geométrica e algebricamente, que:

   (a) Oito vezes um qualquer número triangular adicionado de um é um número quadrado.

   (b) Um número pentagonal é igual ao seu lado adicionado de três números triangulares de lado igual ao lado do número pentagonal menos um.

   (c) Um número pentagonal é igual ao número quadrado com o mesmo lado adicionado do número triangular de lado igual a esse lado menos um.

2. Descreva, por palavras suas, os quatro paradoxos de Zenão mencionados nas aulas (*Dicotomia, Aquiles e a Tartaruga, a Seta, e o Estádio*), e explique qual a sua importância para a História da Matemática.

3. Descreva a quadratura da lúnula de Hipócrates de Quios dada na aula, e demonstre o respectivo resultado.

4. Explique o que se entende por “o divórcio grego”.

5. Descreva de um modo sumário o conteúdo dos *Elementos* de Euclides.

6. O que é um “ângulo rectilíneo”, nos *Elementos* de Euclides? Há algum ângulo não rectilíneo mencionado nos *Elementos*? Em que contexto?

7. O que é que significa “aplicar um paralelogramo, $\mathcal{F}$, a um segmento dado, s, segundo um determinado ângulo (rectilíneo) α”?

8. Reproduza a demonstração dada na aula, e atribuída aos Pitagóricos, do teorema dito de Tales, e explique em traços gerais quais as diferenças entre esta prova e a dada por Euclides, e a razão de ser dessas diferenças.

9. Explique o que são "grandezas" no sentido dado nos *Elementos* de Euclides.

10. Explique o que se entende por *grandezas comensuráveis*.

11. Explique a diferença entre *definições*, *postulados*, e *noções comuns*. Reproduza os 5 postulados de Euclides, assim como as 5 noções comuns.

12. Descreva a hipótese de Paulus Gerdes dada nas aulas para a descoberta do resultado usualmente conhecido como *o Teorema de Pitágoras*.

13. Leia com atenção o enunciado e a demonstração da Proposição 11 do Livro III dos *Elementos* de Euclides, indicando erros ou falhas lógicas, e passos insuficientemente justificados.

    Veja a respectiva figura em: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

    Proposição 11 do Livro III: *Se dois círculos se tocarem internamente, e se tomarem os seus centros, então a linha recta unindo esses centros, sendo prolongada, passa pelo ponto de contacto dos círculos.*

    Sejam ABC e ADE os dois círculos tocando-se internamente no ponto A, e sejam F e G os seus centros. [III.1]

    Digo que a linha recta unindo G a F e continuada cai sobre A.

    Pois suponha-se que não, mas, se possível, deixe-se que caia como FGH. Una-se AF e AG.

    Então, como a soma de AG e GF é maior que FA, isto é, que FH, subtraia-se FG de ambas, e por conseguinte o resto AG é maior que o resto GH. [I.20]

    Mas AG é igual a GD, e portanto GD é também maior que GH, o menor maior que o maior, o que é impossível.

    Portanto a linha unindo F a G não cai fora. Assim, cai em A, o ponto de contacto.

    Portanto *Se dois círculos se tocarem internamente, e se tomarem os seus centros, então a linha recta unindo esses centros, sendo prolongada, passa pelo ponto de contacto dos círculos.*

    Q.E.D.

14. Leia com atenção o enunciado e a demonstração da Proposição 36 do Livro III dos *Elementos* de Euclides (tradução em anexo; comece por tentar desenhar a figura correspondente), e responda às questões colocadas no fim.

Proposição 36 do Livro III: *Se um ponto é tomado fora de um círculo e duas linhas rectas que dele saem incidem no círculo, e se uma delas corta o círculo e a outra o toca, então o rectângulo contido por toda a linha recta que corta o círculo e pela linha recta por ele intersectada e que fica do lado de fora, entre o ponto e a circunferência convexa, é igual ao quadrado na tangente.*

Seja um ponto D tomado fora do círculo ABC, e de D sejam DCA e DB duas rectas incidentes no círculo ABC. Seja DCA a que corta o círculo ABC, e seja BD a que o toca.

Digo que o rectângulo AD por DC é igual ao quadrado em DB.

Então, ou DCA passa pelo centro, ou nõ passa pelo centro.

Suponha-se primeiro que passa pelo centro, e seja F o centro do círculo ABC. Una-se FB. O ângulo FBD é pois recto. [III.18]

E, como AC foi bissectada em F, e CD lhe foi adicionado, o rectângulo AD por DC mais o quadrado em FC é igual ao quadrado em FD. [II.6]

Mas FC é igual a FB, e portanto o rectângulo AD por DC mais o quadrado em FB é igual ao quadrado em FD.

E a soma dos quadrados em FB e BD é igual ao quadrado em FD, e portanto o rectângulo AD por DC mais o quadrado em FB é igual à soma dos quadrados em FB e BD. [I.47]

Subtraia-se o quadrado em FB de ambos. O rectângulo restante, AD por DC, é portanto igual ao quadrado na tangente DB.

Novamente, suponha-se que DCA não passa no centro do círculo ABC. Tome-se o centro E, e trace-se EF de E perpendicular a AC. Una-se EB, EC, e ED. [III.1]

Então o ângulo EBD é recto. [III.18]

E, como a linha recta EF, que passa pelo centro, corta a linha recta AC, que não passa no centro, perpendicularmente, bissecte-a e portanto AF é igual a FC. [III.3]

Agora, como a linha recta AC foi bissectada no ponto F, e CD é-lhe adicionada, o rectângulo AD por DC mais o quadrado em FC é igual ao quadrado em FD. [II.6]

Adicione-se o quadrado em FE a ambos. Portanto, o rectângulo AD por DC mais a soma dos quadrados em CF e FE é igual à soma dos quadrados em FD e FE.

Mas o quadrado em EC é igual à soma dos quadrados em CF e FE, pois o ângulo EFC é recto, e o quadrado em ED é igual à soma dos quadrados em DF e FE, e portanto o rectângulo Ad por DC mais o quandrado em EC é igual ao quadrado em ED. [I.47]

E EC é igual a EB, e portanto o rectângulo AD por DC mais o quadrado em EB é igual ao quadrado em ED.

Mas a soma dos quadrados em EB e BD é igual ao quadrado em ED, pois o ângulo EBD é recto,e portanto o rectângulo AD por DC mais o quadrado em EB é igual à soma dos quadrados em EB e BD. [I.47]

Subtraia-se o quadrado em EB de ambos. Portanto o rectângulo restante, AD por DC, é igual ao quadrado em DB.

Portanto *Se um ponto é tomado fora de um círculo e duas linhas rectas que dele saem incidem no círculo, e se uma delas corta o círculo e a outra o toca, então o rectângulo contido por toda a linha recta que corta o círculo e pela linha recta por ele intersectada e que fica do lado de fora, entre o ponto e a circunferência convexa, é igual ao quadrado na tangente.*

Q.E.D.

(a) Do que leu, deduza quais são os enunciados das Proposições III.18, II.6, I.47, III.1 e III.3 dos *Elementos.*

(b) Resuma os pontos essencias do argumento da demonstração.

15. O que é o "método da exaustão"? Dê exemplo de resultados dos *Elementos* cuja demonstração usa o dito método.

16. Use os *Elementos* de Euclides para preparar uma aula onde mostre que o volume de um cone é igual a um terço do volume de um cilindro com a mesma base e a mesma altura.

17. Descreva (muito sumariamente) três das obras escritas por Arquimedes.

18. Descreva três resultados impressionantes obtidos por Arquimedes.

19. Qual a definição de cónica dada por Apolónio? Descreva os três diferentes tipos de cónicas.

20. O que é o "sintoma" de um cónica?

21. Descreva o teorema de Ptolomeu demonstrado nas aulas.

22. De que assunto trata o livro conhecido pelo nome de *O Almagesto*? Quem o escreveu?

23. Releia a resolução dada por Diofanto de Alexandria do problema II.8 da sua obra *Aritmética*, e use o método aí indicado para:

    (a) Decompor 9 como soma de dois quadrados de números racionais.

    (b) Dar uma decomposição de 16 como soma de dois quadrados de números racionais que seja diferente da dada por Diofanto.

    (c) Dar a fórmula geral de decomposição de um quadrado de um número racional como soma de dois quadrados de números racionais implícita nessa resolução.